

三维可变形圆化多面体离散单元法

毛 佳, 余健坤, 邵琳玉, 赵兰浩

(河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘 要: 为真实模拟岩体的变形特性与运动形态, 将圆化多面体离散单元法与有限单元法结合, 提出一种三维可变形圆化多面体离散单元法。该方法既能真实表征块体的不规则特征, 又降低了接触判断的难度, 同时能准确反映块体的变形特性。在求解切向接触力时, 将接触判断对象从接触对简化为单元整体, 显著提高了计算效率。为分析块体变形特性, 在块体离散单元内部划分有限元网格, 将最外层有限元网格作为最小接触单元。采用直接平均法, 将接触力转化为等效节点力, 并采用非线性有限单元法实现对单元变形特性的精确模拟, 克服了圆化多面体无法反映单元变形的缺陷。通过 5 个算例论证了新方法在捕捉单元变形、运动形态以及其力学特征等方面的准确性和高效性。

关 键 词: 圆化多面体离散单元法; 有限元法; 可变形单元; 等效节点力

中图分类号: O242

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2024) 03-0908-09

Discrete element method based on three dimensional deformable spheropolyhedra

MAO Jia, YU Jian-kun, SHAO Lin-yu, ZHAO Lan-hao

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: In order to simulate the deformation characteristic and motion forms of rock mass, a three-dimensional deformable spheropolyhedral discrete element method is presented, by combining the spheropolyhedral discrete element method (DEM) and the finite element method (FEM). This method effectively captures the irregular characteristics of the block, simplifies contact detection, and provides accurate representations of block deformation. The contact detection object is simplified from individual contact pair to the entire element during tangential contact force calculation, which significantly improves the computational efficiency. In order to analyze the deformation characteristics of the block, the finite element mesh is divided inside the discrete element of the block, with the outermost mesh defined as the minimum contact element. Contact forces are translated to equivalent nodal contact forces using the direct average method. Nonlinear finite element methods accurately simulate element deformation, overcoming the rigid body assumption of spheropolyhedra. Five numerical examples are simulated to verify the accuracy of the proposed method in capturing the deformation, motion morphology and mechanical characteristics of the element.

Keywords: spheropolyhedral discrete element method; finite element method; deformable element; equivalent nodal force

1 引 言

自然环境中的岩体由于受到复杂地质条件与环境的影响, 往往会存在不连续结构面, 使得岩体具有较强的非连续性。采用基于连续介质假定的数值分析方法模拟此类岩体的变形与运动过程时, 难

以反映岩体的非连续本质, 计算结果与实际情况存在较大差异。相反, 以非连续变形分析法 (discontinuous deformation analysis, 简称 DDA)、离散单元法 (discrete element method, 简称 DEM) 为代表的非连续数值分析方法能够弥补此类不足。其中, 离散单元法因其成熟的数值理论, 在研究离

收稿日期: 2023-04-13

录用日期: 2023-08-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.52009034); 江西省水利厅科技项目 (No.202223YBKT04); 河海大学水安全与水科学协同创新中心。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52009034), the Science and Technology Project of Water Resources Department of Jiangxi Province (202223YBKT04) and the Cooperative Innovation Center for Water Safety and Hydro Science, Hohai University.

第一作者简介: 毛佳, 女, 1991 年生, 博士, 副教授, 主要从事滑坡涌浪和流固耦合方面的研究。E-mail: maojia@hhu.edu.cn

通讯作者: 赵兰浩, 男, 1980 年生, 博士, 教授, 主要从事流固耦合和水工结构抗震的工作。E-mail: zhaolanhao@hhu.edu.cn

散颗粒的力学特性等方面表现优异, 被广泛应用于科研领域与工程实际中^[1-2]。

多面体块体离散单元由于其形状类似于岩石和岩屑等离散介质, 能够较好地表征不规则外形, 常用于岩体非线性及动态问题的离散单元法建模中^[3], 但存在块体单元间的接触形式判断难度大的问题。计算块体单元间的接触力之前, 需根据点、边和面的几何特性确定多面体块体离散单元的不同接触形式, 如点-点接触、点-边接触、点-面接触、边-边接触、边-面接触^[4], 使得接触力的计算复杂化, 尤其在推广至三维时, 更加繁琐。

Munjiza^[5]提出了有限元离散元耦合方法 (the combined finite-discrete element method, 简称 FDEM), 该方法通过定义势函数将块体单元间的接触力计算表达为单元重叠区域外表面势函数的积分。该方法已广泛应用于岩石开裂^[6-7]、颗粒破碎^[8]、流固耦合^[9]等研究。然而, FDEM 通过单元重叠区域外表面势函数积分来计算块体单元间接触力的方式依赖于复杂的布尔运算^[10], 且对单元类型存在限制, 即势函数的定义受限于四面体单元, 导致复杂空间多面体单元还需进一步离散为四面体单元, 产生的单元数量庞大, 极大地降低了计算效率^[11]。

为提高计算效率, 在计算接触力时可采用圆化多面体离散单元法。圆化多面体由多面体和球体的闵可夫斯基和构成^[12], 基本思路是将块体的角点圆化处理。与圆化前的普通多面体相比, 圆化多面体具有与其相似的形状, 而角点是球状的^[13]。通过圆化处理, 能够将两个多面体之间的复杂接触简化为两个球体之间的接触, 进而降低接触判断难度, 提高计算效率。

圆化多面体离散单元法计算效率高、接触力计算形式简洁的特点已通过各种应用得到验证^[14], 然而, 该方法仍然存在一些缺陷。圆化多面体离散单元服从刚体假设^[13], 但忽略单元的变形会对模拟结果产生影响, 在砌石体等复杂结构中, 分析内部颗粒发生相对移动时的应力和应变分布至关重要^[15]。此外, 圆化多面体离散单元法是在接触对之间进行切向接触力计算, 对于可能存在多个接触对的复杂单元, 会占用大量计算机内存来存储单元边界的接触力矢量以及每一时刻块体的位移增量^[16]。

为解决上述问题, 提出了一种三维可变形圆化多面体离散单元法, 该方法可以准确描述三维单元的变形和运动过程。在计算切向接触力时, 引入位移增量法计算切向接触力大小, 并以单元间所有几

何元素接触力的矢量和确定切线方向, 节省大量计算内存, 提高计算效率。为实现单元变形分析, 采用直接平均法将接触力转化为等效节点力。通过块体堆积试验、摩擦试验、梁冲击试验、对称杆碰撞试验和料斗流动“卡阻”试验 5 个数值模拟算例论证本文方法的可行性和准确性。

2 三维可变形圆化多面体离散单元法

三维可变形离散单元法集合了圆化多面体离散单元法和有限元法, 前者用于求解单元之间的接触力, 后者用于分析可变形单元的应力和应变状态。如图 1 所示, 为分析离散块体的变形特性, 对每个离散元块体采用有限单元网格进一步离散。以最外层单元为最小接触单元, 对所示的最外层单元进行接触判断和接触力计算。采用圆化多面体离散单元法计算包括法向接触力、切向接触力。在此基础上, 将接触力转换为有限单元节点处的等效节点力。采用有限元法求解单元的应力、应变状态。

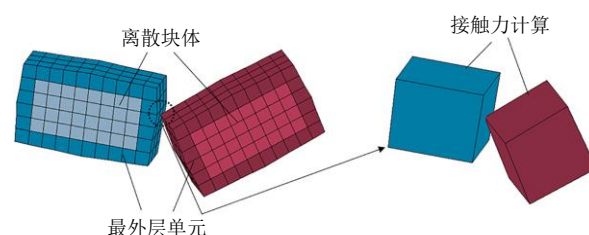


图 1 最外层单元的接触判断及接触力的计算
Fig.1 Outermost elements for contact detection and the calculation of contact force

2.1 法向接触力计算

本文基于闵可夫斯基和方法构造圆化多面体。闵可夫斯基和方法定义如下: 在欧式空间给出两个任意几何体 A、B, 则闵可夫斯基和可定义为 $A \oplus B = \{x+y | x \in A, y \in B\}$, x 、 y 分别为 A、B 内的三维坐标点。对多面体实施圆化操作过程中, 将上述空间几何体分别设定为待圆化多面体 P 和半径为 R 的球体单元 S。由于待圆化多面体 P 和半径为 R 的球体单元叠加后形成的多面体 SP 明显大于待圆化多面体 P, 因此, 本文在叠加待圆化多面体 P 和球体单元 S 之前, 先将待圆化多面体 P 的每个面沿其法向的相反方向收缩距离 R, 得到较小的多面体骨架 H, 然后叠加多面体骨架 H 和球体单元 S, 最终得到圆化多面体 SP。圆化多面体的形成过程如图 2 所示。

假设圆化多面体 SP_1 、 SP_2 相互接触, 且 SP_1 、

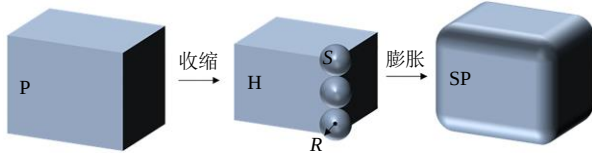


图2 圆化多面体的形成

Fig.2 Formation of a spheropolyhedra

SP₂ 有一组顶点 $\{V_1^i\}$ 、 $\{V_2^i\}$ ，边 $\{E_1^i\}$ 、 $\{E_2^i\}$ ，以及面 $\{F_1^i\}$ 、 $\{F_2^i\}$ 。如图 3 所示，两个圆化多面体之间的接触形式包括点-点接触、点-边接触、点-面接触和边-边接触。

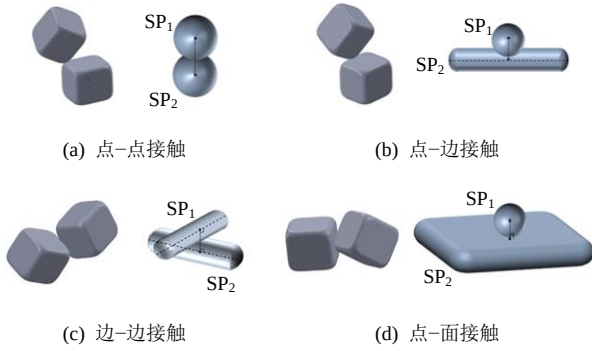


图3 两个圆化多面体的接触形式

Fig.3 Contact forms for two spheropolyhedras

当考虑 SP₁ 和 SP₂ 之间的所有接触形式时，作用在圆化多面体 SP₁ 和 SP₂ 之间的法向接触力合力 $\mathbf{P}_n(\text{SP}_1, \text{SP}_2)$ 等于在各种接触形式下骨架几何元素之间的作用力之和，可表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\text{SP}_1, \text{SP}_2) = & \sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, V_2^j) + \left[\sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NE_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, E_2^j) + \right. \\ & \left. \sum_{\substack{i=1, NE_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(E_1^i, V_2^j) \right] + \left[\sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NF_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, F_2^j) + \right. \\ & \left. \sum_{\substack{i=1, NF_1 \\ j=1, NE_2}} \mathbf{P}_n(F_1^i, E_2^j) \right] + \sum_{\substack{i=1, NE_1 \\ j=1, NE_2}} \mathbf{P}_n(E_1^i, E_2^j) \end{aligned} \quad (1)$$

式中：NV₁、NE₁ 和 NF₁ 分别是骨架 H₁ 的顶点、边和面的数量；NV₂、NE₂ 和 NF₂ 分别是骨架 H₂ 的顶点、边和面的数量。

法向接触力作用于 SP₁ 的力矩 $\mathbf{M}_n$ 为

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{P}_n \times \mathbf{r}_n \quad (2)$$

式中： $\mathbf{r}_n$ 为合力 $\mathbf{P}_n$ 的载荷位置到 SP₁ 质心的矢量。

2.2 切向接触力计算

在传统的圆化多面体离散单元法中，为得到单元间的切向接触力，需计算所有接触对几何元素的

接触力矢量及每个时刻的增量位移^[13]。圆化多面体 SP₁ 在 Z 轴方向上与圆化多面体 SP₂ 发生碰撞，SP₁ 的 4 个角点嵌入到 SP₂ 的表面中，如图 4 所示。SP₁ 和 SP₂ 之间有 4 个接触对。4 个接触对的增量切向力和增量位移必须保存在计算机内存中。当单元数量过大时，记录所有接触对的增量位移和增量切向力的数据将占用计算机大量内存，极大地降低计算效率。

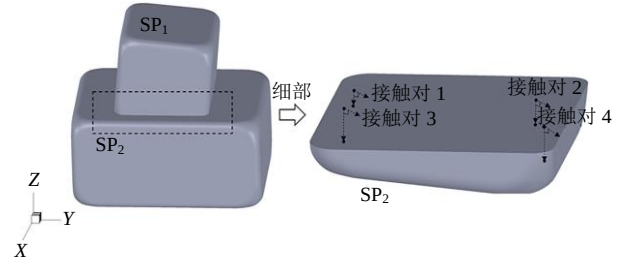


图4 传统圆化多面体离散单元法的接触力计算模型

Fig.4 Contact force model for the spheropolyhedral DEM

为解决以上问题，本文在计算切向接触力时，引入位移增量法，通过单元间每一时刻的切向位移增量值计算切向接触力大小，以单元间所有几何元素接触力的矢量和确定切线方向，从而减少对计算机内存的占用。由于每一时间步的法向接触力的方向矢量不同，存在下一时刻法向接触力与切向接触力不相互垂直的问题，故引入旋转矩阵调整每一时间步的切向接触力方向。如图 5 所示，SP₁ 和 SP₂ 之间的切向力 $\mathbf{P}_s$ 由每一时刻的切向位移增量 $\Delta \delta_s$ 确定。切向接触力 $\mathbf{P}_s$ 的载荷位置与总法向接触力矢量 $\mathbf{P}_n$ 相同，且切向力 $\mathbf{P}_s$ 垂直于法向接触合力矢量。通过这种方法求解单元上的接触力，仅需在计算机中存储接触对的切向力 $\mathbf{P}_s$ 和切向位移增量，从而节省计算机内存，提高计算效率。

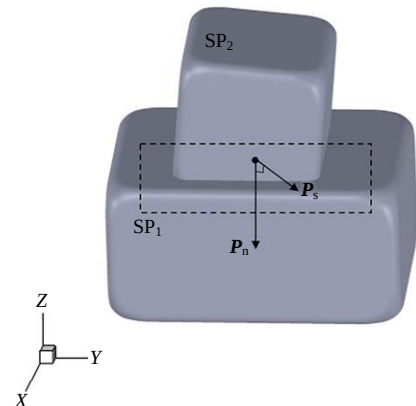


图5 本文方法的接触力计算模型

Fig.5 Contact force model for the proposed method

从时刻 t 到 $t + \Delta t$ (Δt 为时间增量, $t + \Delta t$ 为由时刻 t 经过一个时间增量 Δt 后到达的新时刻), 切向力增量 $\Delta \mathbf{P}_s^{t+\Delta t}$ 可以表示为

$$\Delta \mathbf{P}_s^{t+\Delta t} = K_s \cdot \Delta \boldsymbol{\delta}_s^{t+\Delta t} \quad (3)$$

式中: K_s 为切向接触刚度; $\Delta \boldsymbol{\delta}_s^{t+\Delta t}$ 为两个接触单元之间的相对切向增量位移, 可以由下式得到

$$\Delta \boldsymbol{\delta}_s^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} - (\Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n}_n) \cdot \mathbf{n}_n \quad (4)$$

式中: $\Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}$ 为两个圆化多面体 SP₁ 和 SP₂ 的接触点相对位移增量; $\mathbf{n}_n$ 为每个时间步更新的单位法向接触力的方向矢量。

由于在每一步中, 法向接触力的方向矢量都会更新, 故采用旋转矩阵 $\mathbf{R}_{t_0}$ 用于调整切向力 $\mathbf{P}_s^{t+\Delta t}$ 的方向:

$$\mathbf{P}_s^{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t_0} \times \mathbf{P}_s^t + \Delta \mathbf{P}_s^{t+\Delta t} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{R}_{t_0}$ 为 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻的法向接触力矢量旋转矩阵, 由上一时刻和当前时刻物体所受到的法向接触合力方向矢量确定。

为保证计算精度, 切向力 $\mathbf{P}_s^{t+\Delta t}$ 由摩尔-库仑屈服准则确定:

$$\mathbf{P}_s^{t+\Delta t} = \min(|\mathbf{P}_s^{t+\Delta t}|, \mu |\mathbf{P}_n^{t+\Delta t}|) \cdot \mathbf{n}_s \quad (6)$$

式中: μ 为摩擦系数; $\mathbf{n}_s$ 为 $t + \Delta t$ 时刻切向力的方向向量。

切向接触力产生的力矩为

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{P}_s \times \mathbf{r}_s \quad (7)$$

式中: $\mathbf{r}_s$ 为从切向力 $\mathbf{P}_s$ 的载荷位置到单元质心的矢量。

接触单元的总接触力 $\mathbf{P}_{\text{contact}}$ 表示为

$$\mathbf{P}_{\text{contact}} = \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_s \quad (8)$$

2.3 等效节点力

离散单元法中只把单元的形心点作为基本节点, 这与有限单元法的网格节点有差异。为求解单元的应力和应变, 将接触力根据静力等效原则转换为等效节点荷载至关重要。为满足计算的准确性并提高计算效率, 本文采用直接平均法求解等效节点力。

直接平均法的具体流程是将作用在接触单元上的合力 $\mathbf{P}_{\text{contact}}$ 和力矩 $\mathbf{M}_T$ 平均分配到接触单元的每一个节点。等效节点力 $\mathbf{f}_{\text{contact}}^i$ 计算公式如下:

$$\mathbf{f}_{\text{contact}}^i = \mathbf{f}_F^i + \mathbf{f}_T^i \quad (9)$$

式中: $\mathbf{f}_F^i$ 为接触力作用产生的节点力; $\mathbf{f}_T^i$ 为合力矩作用产生的节点力。 $\mathbf{f}_F^i$ 可通过将接触力 $\mathbf{P}_{\text{contact}}$ 均匀分布到单元的所有节点而得到, 如图 6(a)所示。由图 6(b)可以看出, 合成力矩 $\mathbf{M}_T$ 所产生的节点力 $\mathbf{f}_T^i$ 定义为

$$\mathbf{f}_T^i = \mathbf{f}_T^i \frac{\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i|} \quad (10)$$

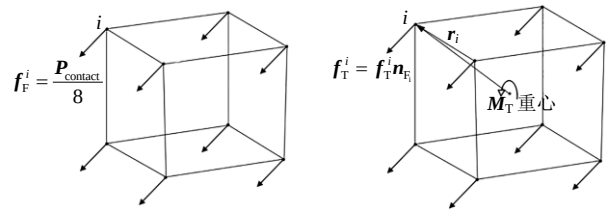
式中: $\mathbf{r}_i$ 为从质心到节点 i 的矢量; $\mathbf{M}_T$ 满足 $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_s$ 。

节点力大小 f_T^i 通过以下公式计算:

$$f_T^i = r_i \frac{|\mathbf{M}_T|^2}{\left(\sum_{i=1}^n r_i |\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i| \right)} \quad (11)$$

因此, 节点力 $\mathbf{f}_T^i$ 可计算如下:

$$\mathbf{f}_T^i = \mathbf{r}_i \frac{|\mathbf{M}_T|^2}{\left(\sum_{i=1}^n r_i |\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i| \right)} \frac{\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{M}_T \times \mathbf{r}_i|} \quad (12)$$



(a) 接触力产生的节点力 $\mathbf{f}_F^i$ (b) 力矩 $\mathbf{M}_T$ 产生的节点力 $\mathbf{f}_T^i$

图6 基于直接平均法计算等效节点力

Fig.6 Calculating the equivalent nodal force based on the direct average method

2.4 控制方程

离散单元的控制方程可以从作用在其上所有力的平衡条件得到

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{C}\mathbf{v} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为质量矩阵; $\mathbf{a}$ 为加速度向量; $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ 为外力向量, 包括接触力向量 $\mathbf{f}_{\text{contact}}$ 和外部载荷向量 $\mathbf{f}_{\text{load}}$; $\mathbf{f}_{\text{int}}$ 为内部节点力向量; $\mathbf{v}$ 为速度向量; $\mathbf{C}$ 为瑞利阻尼矩阵。

由于本文所提计算方法在考虑单元的变形时, 会涉及到大位移和大应变等几何非线性问题, 故以有限单元作为该方法的基本接触单元, 接触判断以及接触力的求解仅在最外层的有限单元之间进行。本文采用更新的拉格朗日格式 (the updated

Lagrangian formulation, 简称 U.L.) 来求解非线性问题。

有限单元的节点坐标在每个时刻都会更新。 $t + \Delta t$ 时刻节点内力矢量 $\mathbf{f}_{\text{int}}$ 计算如下:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int \mathbf{B}_t^T (\boldsymbol{\tau}_t + \Delta \mathbf{S}) d\Omega \quad (14)$$

式中: $\mathbf{B}_t^T$ 为时刻 t 构型对应的增量应变-位移转换矩阵; $\boldsymbol{\tau}_t$ 为参照时刻 t 构型定义的柯西应力矩阵; Ω 为单位体积; $\Delta \mathbf{S}$ 为时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ 的增量第二类 Piola-Kirchhoff 应力, 计算如下:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{D}$ 为时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ 的增量材料本构矩阵; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ 的增量应变, 计算如下:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_t \cdot \mathbf{u}_{t+\Delta t} \quad (16)$$

式中: $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ 为时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ 的增量位移。

求解运动方程采用显示求解格式, 使用 Velocity-Verlet 算法^[17]对运动方程进行积分。每当时刻 t 的计算完成时, 执行时刻 $t + \Delta t$ 的计算。 $t + \Delta t$ 时刻的运动方程可从方程 (13) 中推导出:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{\text{int}}^{t+\Delta t} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}^{t+\Delta t} \quad (17)$$

综上所述, 本文所提方法的具体实施步骤如下:

- (1) 建立模型的三维几何形状, 采用四面体单元或六面体单元对模型进行网格划分;
- (2) 输入位移、速度、压力等外部载荷和约束条件, 定义模型不同部分的材料参数;
- (3) 使用 Velocity-Verlet 算法得到当前时刻 $t + \Delta t$ 的预测位移 $\mathbf{p} \mathbf{u}^{t+\Delta t}$;
- (4) 通过圆化多面体离散单元法计算接触力 $\mathbf{f}_{\text{contact}}$, 然后将接触力转换为等效节点力;
- (5) 使用有限单元法计算应力和内部节点力向量 $\mathbf{f}_{\text{int}}$;
- (6) 求解运动方程, 计算在当前时刻 $t + \Delta t$, 有限元节点处的加速度 $\mathbf{a}^{t+\Delta t}$, 速度 $\mathbf{v}^{t+\Delta t}$ 和位移 $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$ 。
- (7) 更新有限元节点的坐标。

3 数值计算

为验证本文所提出的三维可变形圆化多面体离散单元法具有可行性和准确性, 本节给出了 5 个算例加以佐证。首先通过块体堆积试验验证了该方法具有计算高效的特点, 同时验证圆化操作对计算效率提升的作用; 然后通过摩擦试验验证所提出的

方法可以准确地计算发生大位移单元的切向接触力, 同时证明本文方法的计算精度较好; 随后, 通过对梁的动态响应和模拟对称杆的碰撞来验证本方法可以捕捉单元间接触过程中的应力与应变; 最后, 通过料斗流动“卡阻”试验证明, 本方法能够有效模拟可变形块体的运动行为。

3.1 块体堆积试验

本节通过模拟 9 234 个四面体块体落入直径为 22 m 的圆柱体中的堆积状态, 来测试本文所提方法的计算效率。为便于比较, 采用三维可变形圆化多面体离散单元法和 FDEM 模拟块体的堆积状态。四面体块体的材料属性为: 密度 $\rho = 2\,000 \text{ kg/m}^3$, 阻尼比 $\xi = 0.000\,5$, 弹性模量 $E = 20 \text{ GPa}$, 法向刚度 $K_n = 100 \text{ MPa}$, 切向刚度 $K_s = 10 \text{ MPa}$ 。两种方法采用相同的时间步长 $\Delta t = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$ 。为避免不同计算机硬件配置和操作系统环境对计算结果产生影响, 所有结果都由同一台计算机获得。

$t = 8 \text{ s}$ 时刻块体堆积状态结果如图 7 所示, FDEM 和本文所提方法模拟的块体堆积状态结果相对相似。FDEM 模拟耗时 415 082 s, 本文提出的三维可变形圆化多面体离散单元法耗时 203 310 s, 说明圆化操作能够有效提升计算效率。

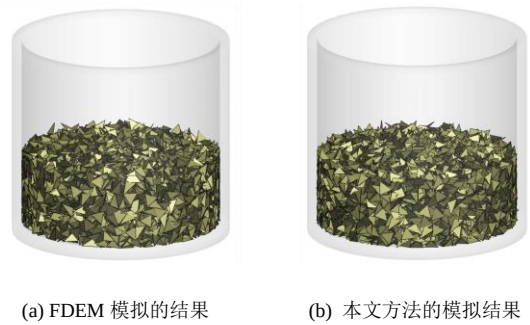


图 7 块体堆积状态模拟结果
Fig.7 Simulation results of block packing

3.2 摩擦试验

本节通过摩擦试验证明三维可变形圆化多面体离散单元法可以准确计算切向接触力, 能够有效模拟弹性体滑动行为, 计算基于 Neto 等^[18]给出的几何结构。模型的初始状态如图 8 所示。带有圆形边缘的弹性体放置在较大的弹性梁的右侧, 弹性体和梁分别离散为 3 512 和 28 800 个有限元。梁的左右两端和底部为固定约束, 在 $t = 0 \text{ s}$ 给予弹性体 $u = -1 \text{ m}$ 的垂直位移约束, 并保持约束作用至 $t = 8.0 \text{ s}$ 。弹性体在 $t = 1.0 \text{ s}$ 和 $t = 8.0 \text{ s}$ 之间以水平速度 $v = -20 \text{ m/s}$ 向左侧滑动。弹性体和梁的法向刚度、切

向刚度分别为 $K_n = 2.0 \text{ GPa}$ 和 $K_s = 0.7 \text{ GPa}$ 。弹性体和梁具有相同的材料属性: 摩擦系数 $\mu = 0.5$, 弹性模量 $E = 2.0 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.2$, 密度 $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ 。

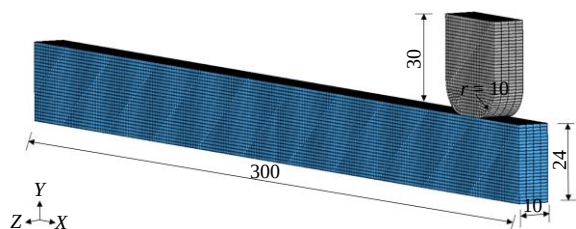


图8 初始时刻摩擦试验模型的结构 (单位: m)
Fig.8 Initial configuration of the frictional ironing test (unit: m)

弹性体和梁在不同时刻的剪应力如图9所示。初始时刻, 梁的剪应力在弹性体下方均匀分布, 如图9(a)所示; 之后, 弹性体沿着梁水平滑动到左侧。在弹性体滑动过程中, 模型的最大剪应力位于弹性体的左下角, 如图9(b)、9(c)所示。弹性体与梁之间的法向反作用力和切向反作用力之间的关系如图10所示, 可得 $t = 1.3 \text{ s}$ 和 $t = 8.0 \text{ s}$ 之间的摩擦系数与规定的摩擦系数 $\mu = 0.50 \pm 0.01$ 一致。结果表明, 三维可变形圆化多面体离散单元法可以模拟弹性体的滑动过程, 且该方法可以准确计算单元间的应力状态。图中, σ_{xx} 为 x 向剪应力。

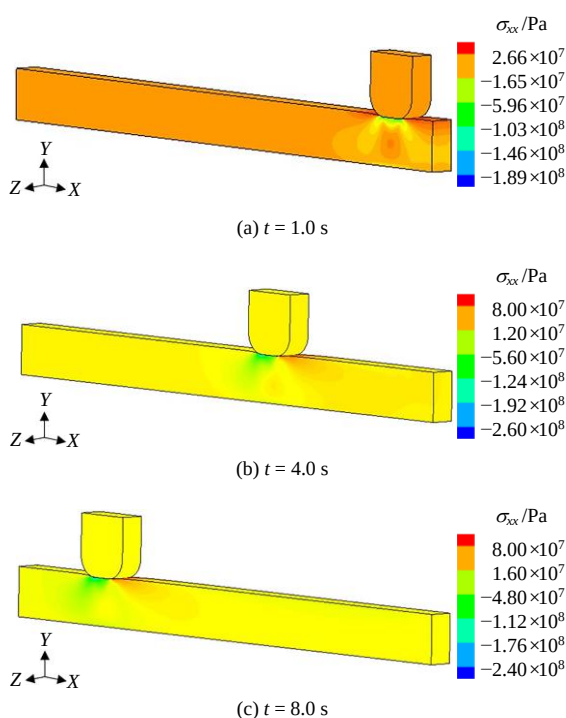


图9 弹性体和梁在不同时刻的剪应力 σ_{xx}
Fig.9 Shear stresses σ_{xx} of the elastomer and beam in different moments

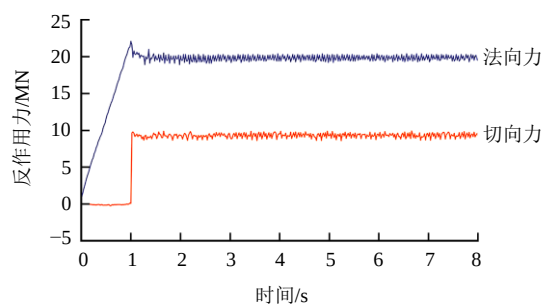


图10 法向反作用力与切向反作用力的关系
Fig.10 Relationship between the normal reaction force and tangential reaction force

3.3 超静定梁冲击试验

对超静定梁受块体冲击作用下的动力响应进行仿真, 验证本文方法捕捉单个块体自身变形的准确性。梁的上方是一个尺寸为 $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ 的冲击物块。物块的初始速度为 $v_z = -1.0 \text{ m/s}$, 梁的尺寸为 $10 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ (跨度 $\times$ 高度 $\times$ 宽度), 如图11所示。冲击物块和梁被分别离散为250个和10000个有限单元。冲击物块和梁具有相同的材料属性: 弹性模量 $E = 20 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.2$, 密度 $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, 法向刚度 $K_n = 0.2 \text{ GPa}$, 切向刚度 $K_s = 0.2 \text{ GPa}$ 。

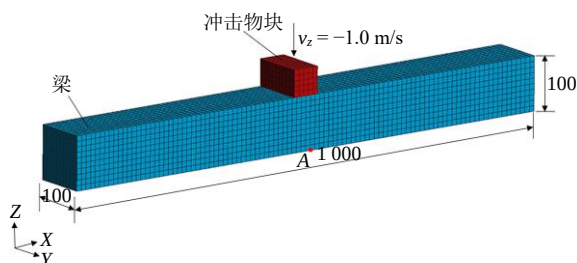


图11 模型的网格划分 (单位: mm)
Fig.11 Meshing of the model (unit: mm)

采用有限单元法和三维可变形圆化多面体离散单元法计算的梁底中心点A沿Z轴位移历程如图12所示。两种方法在0.7 ms和1.4 ms时刻计算的梁的第一主应力 σ_1 分布如图13(a)和13(b)所示。结果表明, 本方法与有限单元法模拟的结果吻合良好, 验证了本方法的准确性。

3.4 对称杆碰撞试验

对称杆碰撞试验是接触冲击类问题的经典算例, 被广泛应用于验证接触力计算的准确性。计算模型如图14所示, 两根杆的末端之间有0.02 m的间隙, 杆的初始速度分别为1.0 m/s和-1.0 m/s, 在X轴上相向运动。材料属性为: 弹性模量 $E = 1 \text{ kPa}$, 泊松比 $\nu = 0$, 密度 $\rho = 0.001 \text{ kg/m}^3$ 。模拟采用法向刚度 K_n 分别为5、10、25 Pa下两杆的碰撞过程。

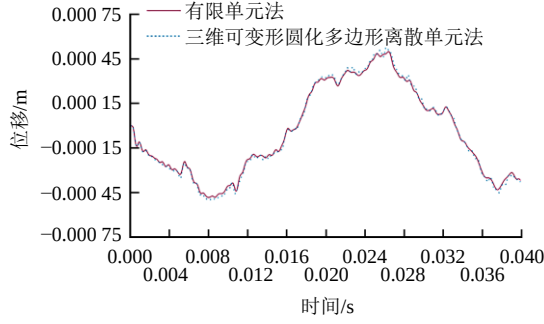


图 12 中心点 A 沿 Z 轴位移时程曲线

Fig.12 Time history curve of displacement of center point A along the Z-axis

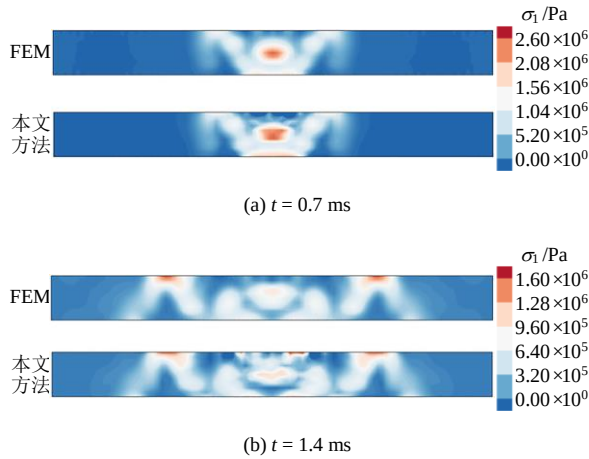
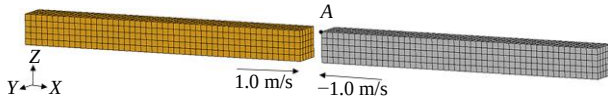
图 13 不同时刻梁的第一主应力 σ_1 (单位: Pa)Fig.13 Results of the major principle stress σ_1 of the beam in different moments (unit: Pa)

图 14 初始时刻对称杆碰撞试验模型的结构

Fig.14 Initial configuration of the two identical bars

右杆接触面的位移和速度理论解^[19]如下:

$$L_t = \begin{cases} -v_0 t, & t \leq t_0 \\ -s, & t_0 < t \leq t_1 \\ -2s - 2v_0 L \sqrt{\rho/E} + v_0 t, & t > t_1 \end{cases} \quad (18)$$

$$v_t = \begin{cases} -v_0, & t \leq t_0 \\ 0, & t_0 < t \leq t_1 \\ v_0, & t \geq t_1 \end{cases} \quad (19)$$

式中: v_t 和 L_t 为右杆的速度和位移; s 为两个杆最近末端之间的初始间隙, $t_0 = s/v_0$, $t_1 = s/v_0 + 2L\sqrt{\rho/E}$ 。

另增设一组两杆服从刚体假设的情况, 取两杆的弹性模量 $E = 20 \text{ MPa}$, 比较刚性杆与弹性杆的试

验结果。为便于观察试验结果, 取图 14 中的点 A 为观测点。不同刚度下节点 A 的位移时程如图 15 所示, 可见刚性杆碰撞后会立刻反弹, 而由于弹性变形, 弹性杆在碰撞后不会快速反弹, 当弹性杆的法向刚度增加时, 位移时程的模拟结果与理论解更加一致。如图 16 和图 17 所示, 两个杆碰撞后, 由速度和应力时程可以看出, 速度和应力在同一时间段内成反比例变化, 说明杆的动能转化为弹性势能。结果表明, 三维可变形圆化多面体离散单元法模拟的块体碰撞过程满足能量转化规律。对比数值解与理论解可以看出, 本文方法所得计算结果与理论解符合良好, 说明本方法准确可靠。

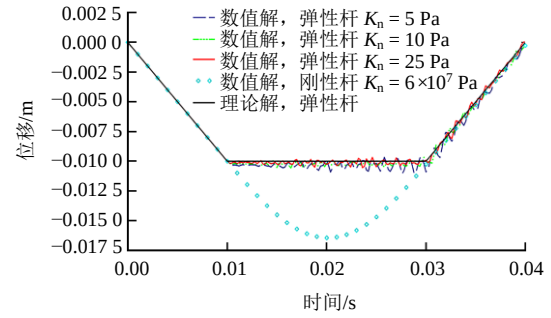


图 15 不同刚度下节点 A 的位移时程

Fig.15 Displacement histories of node A with different stiffnesses

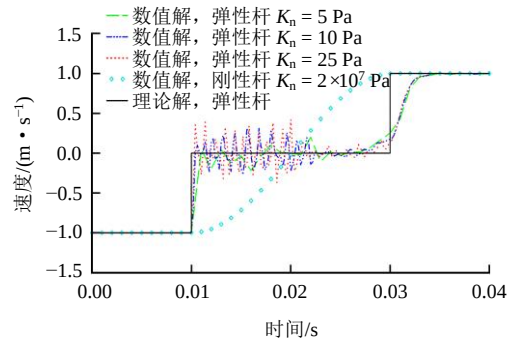
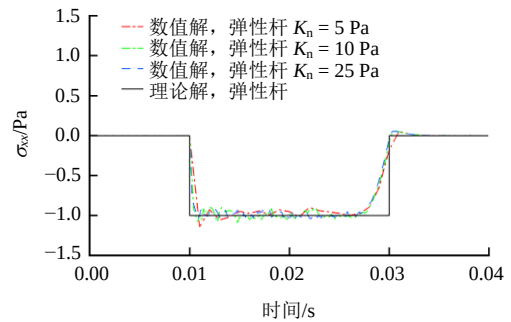


图 16 不同刚度下节点 A 的速度时程

Fig.16 Velocity histories of node A with different stiffnesses

图 17 不同刚度下节点 A 的 X 向应力 σ_{xx} 时程Fig.17 X stresses σ_{xx} histories of node A with different stiffnesses

3.5 料斗流动卡阻试验

凹形块体已被证明比凸形块体更容易堵塞^[20],但是,可变形凹形块体对卡阻的影响尚未得到深入研究。本节将采用三维可变形圆化多面体离散单元法模拟凹多面体单元在料斗中的动力学行为,并分析不同弹性模量对凹多面体块体卡阻的影响。凹多面体单元选用十字形块体,料斗和十字形块体的几何形状及尺寸如图 18 所示。每个十字形块体离散为 25 个有限元。块体在重力的作用下自由下落,所受重力加速度为 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$,块体与块体之间不设置摩擦。这些块体的材料参数为:法向刚度 $K_n = 50 \text{ MPa}$,切向刚度 $K_s = 50 \text{ MPa}$,密度 $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$,泊松比 $\nu = 0.2$ 。块体的弹性模量 E 分别为 300 MPa 、 10 GPa 。

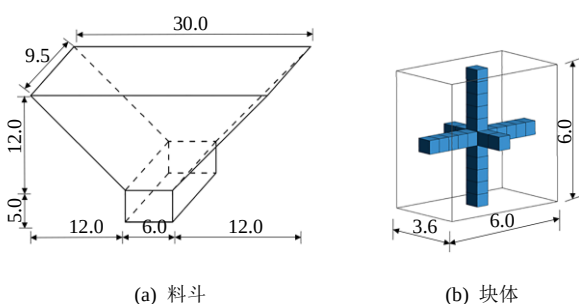


图 18 模型的几何形状 (单位: m)

Fig.18 Geometry of the model (unit: m)

模拟结果如图 19 所示。当弹性模量 $E = 300 \text{ MPa}$ 时,如图 19(a)所示,初始阶段,十字形块体之间由于相互作用而发生变形。之后,当块体试图通过料斗时,相互间产生挤压,从而增加块体内部的应力。最后,所有块体顺利地流出料斗,未发生卡阻现象,同时块体内部的应力减小。当模量为 $E = 20 \text{ GPa}$ 时,

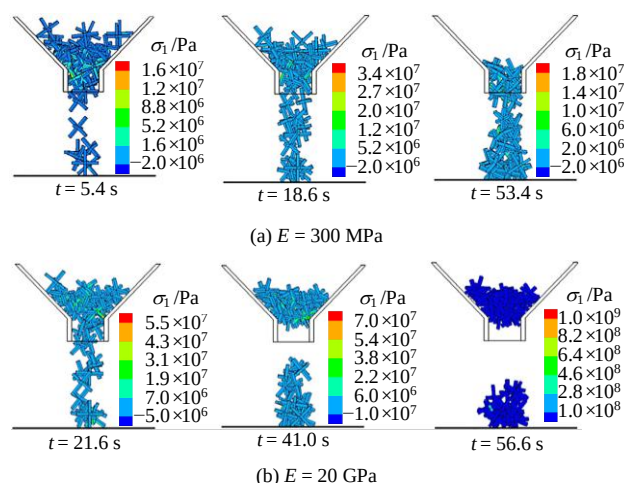


图 19 不同弹性模量模拟的块体的第一主应力 σ_1

Fig.19 The first principal stress σ_1 of the block simulated with different moduli of elasticity

如图 19(b)所示,十字形块体将发生卡阻现象,原因是块体的弹性模量较大,块体不会产生显著的变形,因此,块体在出口附近形成拱形结构,堵塞孔口。由此可知,块体的变形会对块体的动力学行为产生较大影响。通过该试验,验证了本文所提出的方法能够准确反映块体的变形特性和运动行为,同时说明了本文方法适用于捕捉复杂凹多面体运动过程。

4 结 论

(1) 本文提出了一种三维可变形圆化多面体离散单元法,通过将复杂形状的多面体进行圆化处理,降低接触判断难度。采用有限元网格对离散单元进一步划分,突破了圆化多面体单元的刚体假设,从而能够准确地模拟不规则形状单元的运动状态、变形和力学特性。

(2) 提出了一种改进的切向接触力计算模型,引入位移增量法计算切向接触力大小,并以单元间所有几何元素接触力的矢量和确定切线方向,从而节省计算资源。

(3) 通过块体堆积试验、摩擦试验、横梁冲击试验、对称杆碰撞试验和料斗流动卡阻试验验证了本方法的准确性。

参 考 文 献

- [1] 崔旭浩, 肖宏. 基于离散单元法的铁路板结道床动力特性分析[J]. 西南交通大学学报, 2021, 56(6): 1197-1204.
CUI Xu-hao, XIAO Hong. Dynamic characteristics analysis of hardening railway ballast bed based on discrete element method[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2021, 56(6): 1197-1204.
- [2] 毛佳, 赵兰浩, 刘勋楠, 等. 滑坡过程数值模拟的三维距离势离散元法[J]. 中国矿业大学学报, 2020, 49(6): 1094-1100.
MAO Jia, ZHAO Lan-hao, LIU Xun-nan, et al. Numerical simulation of landslides with the three-dimensional distance potential discrete element method[J]. *International Journal of Mining Science and Technology*, 2020, 49(6): 1094-1100.
- [3] 刘广煜, 徐文杰, 周乾, 等. 基于块体离散元法的多面体接触重叠算法[J]. 计算力学学报, 2022, 39(3): 265-272.
LIU Guang-yu, XU Wen-jie, ZHOU Qian, et al. The polyhedron overlap algorithm based on the blocky discrete element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, 39(3): 265-272.

- [4] ZHANG H, CHEN G, ZHENG L, et al. Detection of contacts between three-dimensional polyhedral blocks for discontinuous deformation analysis[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2015, 78: 57-73.
- [5] MUNJIZA A. The combined finite-discrete element method[M]. West Sussex: Hoboken, 2004.
- [6] 陈兴, 马刚, 周伟, 等. 无序性对脆性材料冲击破碎的影响[J]. 物理学报, 2018, 67(14): 219-228.
CHEN Xing, MA Gang, ZHOU Wei, et al. Effects of material disorder on impact fragmentation of brittle spheres[J]. **Acta Physica Sinica**, 2018, 67(14): 219-228.
- [7] 王学滨, 刘桐辛, 白雪元, 等. 基于考虑动力本构的连续-非连续方法的单轴压缩岩样开裂过程模拟[J]. 岩土力学, 2022, 43(10): 2911-2922.
WANG Xue-bin, LIU Tong-xin, BAI Xue-yuan, et al. Numerical simulation of fracturing processes of rock specimens in uniaxial compression based on the continuum-discontinuum method considering the dynamic constitutive model[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2022, 43(10): 2911-2922.
- [8] 周剑, 马刚, 周伟, 等. 基于 FDEM 的岩石颗粒破碎后碎片形状的统计分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2021, 55(2): 348-357.
ZHOU Jian, MA Gang, ZHOU Wei, et al. Statistical analysis of fragment shape of rock grain after crushing based on FDEM[J]. **Journal of Zhejiang University (Engineering Science)**, 2021, 55(2): 348-357.
- [9] 王胤, 陶奕辰, 程旷, 等. 任意解流流固耦合数值方法及在砂土渗流分析中应用[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(11): 2084-2093.
WANG Yin, TAO Yi-chen, CHENG Kuang, et al. Arbitrary resolved-unresolved CFD-DEM coupling method and its application to seepage flow analysis in sandy soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2021, 43(11): 2084-2093.
- [10] 刘勋楠, 赵兰浩, 毛佳, 等. 三维距离势离散单元法[J]. 岩土力学, 2018, 39(7): 2639-2650.
LIU Xun-nan, ZHAO Lan-hao, MAO Jia, et al. Discrete element method using three dimensional distance potential[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(7): 2639-2650.
- [11] 严成增, 郑宏, 葛修润. 基于统一标定的势接触力计算[J]. 岩土力学, 2015, 36(1): 249-256.
YAN Cheng-zeng, ZHENG Hong, GE Xiu-run. Unified calibration based potential contact force in discrete element method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(1): 249-256.
- [12] 刘璐, 龙雪, 季顺迎. 基于扩展多面体的离散单元法及其作用于圆桩的冰载荷计算[J]. 力学学报, 2015, 47(6): 1046-1057.
LIU Lu, LONG Xue, JI Shun-ying. Dilated polyhedra based discrete element method and its application of ice load on cylindrical pile[J]. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 2015, 47(6): 1046-1057.
- [13] GALINDO-TORRES S A, PEDROSO D M, WILLIAMS D J, et al. Breaking processes in three-dimensional bonded granular materials with general shapes[J]. **Computer Physics Communications**, 2012, 183(2): 266-277.
- [14] 孙珊珊, 严颖, 赵春发, 等. 往复荷载下铁路道砟沉降特性的扩展多面体离散元分析[J]. 铁道学报, 2015, 37(11): 89-95.
SUN Shan-shan, YAN Ying, ZHAO Chun-fa, et al. Dilated polyhedral discrete element analysis of settlement characteristics of railway ballast under cyclic loading[J]. **Journal of The China Railway Society**, 2015, 37(11): 89-95.
- [15] 刘洋, 于鹏强, 张铎, 等. 一个基于微观力学分析的散粒体应力-剪胀关系[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(10): 1816-1824.
LIU Yang, YU Peng-qiang, ZHANG Duo, et al. Micromechanics-based stress-dilatancy relationship for granular materials[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2021, 43(10): 1816-1824.
- [16] ALONSO-MARROQUIN F, WANG Y. An efficient algorithm for granular dynamics simulations with complex-shaped objects[J]. **Granular Matter**, 2009, 11(5): 317-329.
- [17] ZHENG F, LEUNG Y F, ZHU J B, et al. Modified predictor-corrector solution approach for efficient discontinuous deformation analysis of jointed rock masses[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2019, 43(2): 599-624.
- [18] NETO D M, OLIVEIRA M C, MENEZES L F. Surface smoothing procedures in computational contact mechanics[J]. **Archives of Computational Methods in Engineering**, 2015, 24(1): 37-87.
- [19] WONG S V, HAMOUDA A., HASHMI M S J. Kinematic contact-impact algorithm with friction[J]. **International Journal of Crashworthiness**, 2001, 6: 65-82.
- [20] GALINDO-TORRES S A, ALONSO-MARROQUIN F, WANG Y C, et al. Molecular dynamics simulation of complex particles in three dimensions and the study of friction due to nonconvexity[J]. **Physical Review E**, 2009, 79(6 Pt 1): 060301.